9П

УДК 681.3.01:519.67

М.В. Полякова, В.Н. Крылов, Н.А. Гуляева
Одесский национальный политехнический университет, Украина

Линейное масштабно-пространственное представление изображения с помощью вейвлет-преобразования

Разработан метод линейного масштабно-пространственного представления изображения на основе интегро-дифференциального уравнения 1-го порядка со сверткой вейвлет-функций в качестве ядра интегрального оператора.

Введение

Масштабно-пространственное представление – это множество копий исходного изображения с разными масштабами, которые позволяют охарактеризовать объекты иерархической структуры [1], т.е. объекты, которые содержат подобъекты. При решении прикладных задач используются те копии исходного изображения, которые имеют наибольшую семантическую значимость в зависимости от цели обработки.

Масштабно-пространственное представление изображения широко используется при обработке медицинских изображений, изображений аэрофотосъемки, а также при контроле качества изделий в промышленности, когда решаются задачи определения формы объекта, контурной сегментации, определения оптического потока и стереозрения. Такое представление позволяет существенно повысить оперативность обработки и достоверность распознавания объектов на изображениях.

Масштабно-пространственное представление изображения может быть линейным или нелинейным. Линейное масштабно-пространственное представление строится на основе уравнения диффузии и ставит в соответствие изображению $I(x,y)$ зависящее от масштаба t однопараметрическое семейство изображений $I(x,y,t)$, которое удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial I(x,y,t)}{\partial t} = \Delta I(x,y,t), \tag{1}$$

с начальным условием $I(x,y,0) = I(x,y)$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, x, y – пространственные координаты. Предполагается, что масштабный параметр $t \geq 0$ монотонно возрастает и некоторым образом может быть соотнесен с пространственным масштабом [1].

В [1] показано, что $I(x,y,t)$ может быть получено с помощью свертки с гауссовской функцией $G(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}$. В этом случае построение масштабно-пространственного представления сводится к построению последовательности сглаженных изображений. Производные изображений $I(x,y,t)$ также удовлетворяют уравне-

нию диффузии, а производные гауссовских функций генерируют масштабно-пространственное представление, подчеркивающее контуры объектов на разных масштабах.

Процесс получения масштабно-пространственного представления изображения на основе уравнения (1) называется изотропной диффузией. Изотропная диффузия обеспечивает помехоустойчивость представления путем сглаживания изображения, однако в этом случае размываются контуры, которые часто являются наиболее информативной частью объекта распознавания.

Для решения этой проблемы часть информации о контурах вносят в качестве нелинейности в дифференциальное уравнение в частных производных. Тогда внутри однородных областей изображение сглаживается сильнее, чем вдоль границ областей. Полученное в результате решения задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных масштабно-пространственное представление изображения называется нелинейным, а подход, который применяется для его построения – анизотропным диффузионным [2]. Этот подход позволяет повысить качество выделения контуров и улучшить результат сегментации. Уравнение анизотропной диффузии имеет вид:

$$\frac{\partial I(x,y,t)}{\partial t} = div\left[g(\|\nabla I\|)\nabla I\right],$$

где div – дивергенция, $div = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$; ∇ – градиент, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$; $g(\|\nabla I\|)$ – пороговая функция для перепадов интенсивности изображения такая, что $g(0) = 1$, $g(x) \geq 0, \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Выбор $g(x)$ производится по аналогии с выбором порога для $\|\nabla I\|$ в дифференциальных методах контурной сегментации изображений [2]. Недостатком анизотропного диффузионного подхода являются большой объем вычислений по сравнению с линейной диффузией и низкая помехоустойчивость из-за использования производных по пространственным координатам. Значительная часть практических задач характеризуется высоким уровнем помех. Поэтому задача разработки нового подхода к построению масштабно-пространственного представления изображения, позволяющего локализовать контуры и обеспечивающего высокую помехоустойчивость, является актуальной.

В случае иерархической структуры объекта распознавания для получения масштабно-пространственного представления изображения вместо пространственного дифференцирования в данной работе предлагается применять репагулярное вейвлет-преобразование. Это преобразование определено в [3] как свертка строки или столбца изображения с функцией $\psi(x,a) = \begin{cases} |x|^{-a} \operatorname{sgn} x, & |x| \leq \varepsilon_a; \\ 0, & |x| > \varepsilon_a, \end{cases}$ где ε_a – фиксированное число, зависящее от $a \in (0,1)$ – параметра преобразования. Применение репагулярного вейвлет-преобразования для подчеркивания перепадов интенсивности изображения в задаче контурной сегментации изображений позволило достичь более высокой помехоустойчивости методов сегментации по сравнению с применением дифференцирования [3].

Для характеристики помехоустойчивости в работе используется показатель качества масштабно-пространственного представления, оценивающий близость результатов представления для зашумленного и незашумленного изображений, и пока-

затель эффективности, учитывающий уменьшение энтропии изображения при снижении уровня помех. Так как применение репагулярного вейвлет-преобразования при построении масштабно-пространственного представления обусловлено необходимостью сохранения границ объектов при подавлении шума на однородных участках изображения, **целью работы** является повышение эффективности линейного масштабно-пространственного представления изображения с помощью вейвлет-преобразования. Для достижения поставленной цели решены следующие задачи:

– разработан метод линейного масштабно-пространственного представления изображения на основе интегро-дифференциального уравнения 1-го порядка со сверткой вейвлет-функций в качестве ядра интегрального оператора;

– экспериментально исследованы качество и эффективность предложенного метода.

Построение линейного масштабно-пространственного представления изображения с помощью вейвлет-преобразования

Как уже упоминалось, линейное масштабно-пространственное представление строится на основе уравнения диффузии (1). Обозначим m-ю строку изображения $I(x,y,t)$ через $u(x,t)$:

$$u(x,t) = I(x,y_m,t).$$

Тогда (1) для m-й строки изображения имеет вид:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}. \quad (2)$$

При моделировании изображения, содержащего перепады интенсивности, последние описываются функцией Хевисайда. Поэтому в общем случае функция $u(x,t)$, удовлетворяющая (2), имеет разрывы 1-го рода и может быть представлена как обобщенная функция, зависящая от параметра t. Дифференцирование в (2) выполняется для обобщенной функции [4].

Дифференцирование по пространственной координате можно представить в виде свертки строки изображения с производной дельта-функции [4], тогда (2) имеет вид:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \delta'(x) * (\delta'(x) * u(x,t)). \quad (3)$$

При использовании вейвлет-преобразования для подчеркивания контуров изображения задача сегментации сводится к задаче определения точек, в которых изменяется регулярность функции значений интенсивности изображения в зависимости от пространственных координат. Для обнаружения изменений регулярности функции целесообразно использовать специальный вид вейвлет-преобразования, характеризующийся не изменением параметра масштаба, а изменением показателя регулярности вейвлет-функции. Этот вид вейвлет-преобразования, которое называется репагулярным (от латинского repagulum – сдерживающая преграда), реализуется как свертка изображения с вейвлет-функциями разной регулярности, локализованными в одной точке. Известно, что подчеркивание перепадов интенсивности изображения с помощью вейвлет-функций разной регулярности $\psi(x,a)$, где $a \in (0,1)$, обеспечивает

большую по сравнению с операцией дифференцирования помехоустойчивость [3]. Поэтому заменим в (3) $\delta'(x)$ на функцию вида $\psi(x,a)$, где $a \in (0,1)$ фиксировано, получаем

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \psi(x,a) * (\psi(x,a) * u(x,t). \tag{4}$$

Формула (4) представляет собой обыкновенное интегро-дифференциальное уравнение 1-го порядка со сверткой вейвлет-функций в качестве ядра интегрального оператора [5]. Поставим задачу Коши: найти решение этого уравнения (обобщенную функцию, которая зависит от параметра *t*), обращающееся при *t* = 0 в заданную обобщенную функцию *f*(*x*). Чтобы раскрыть физический смысл (4), учтем, что первообразная функция $\psi(x,a)$ имеет вид:

$$\varphi(x,a) = \frac{1}{-a+1}|x|^{-a+1} + C(a),$$

где *C*(*a*) – произвольная функция *a* [4], поэтому выберем *C*(*a*) = 0. В этом случае $\psi(x,a) = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,a).$

Тогда (4) можно представить как

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,a) * \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,a) * u(x,t)\right). \tag{5}$$

Согласно свойству дифференцирования свертки обобщенных функций, формула (5) принимает вид:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \varphi(x,a) * \left(\varphi(x,a) * \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right). \tag{6}$$

В области преобразования Фурье (6) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\omega,t) = -\omega^2(\varphi(\omega,a))^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2}(\omega,t). \tag{7}$$

Формула (7) представляет собой в области преобразования Фурье уравнение диффузии в неоднородной среде. Использование такого уравнения предполагает, что сглаживание спектральной плотности изображения можно представить как процесс диффузии в неоднородной среде.

Чтобы найти концентрацию вещества в любой точке среды в любой момент времени, недостаточно одного уравнения (7). Необходимо знать еще распределение концентрации вещества в начальный момент времени – начальное условие: $u(\omega,0) = f(\omega)$. Таким образом получаем в области преобразования Фурье задачу Коши для уравнения диффузии в неоднородной изотропной среде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(\omega,t)}{\partial t} = -\omega^2(\varphi(\omega,a))^2 \dfrac{\partial^2 u(\omega,t)}{\partial \omega^2}, \\ u(\omega,0) = f(\omega). \end{cases} \tag{8}$$

Решение задачи Коши (8), описывающей преобразование спектральной плотности изображения как процесс диффузии в неоднородной среде, получается путем применения преобразования Фурье к решению (4) с начальным условием

$$u(x,0) = f(x). \qquad (9)$$

Для нахождения решения обыкновенного интегро-дифференциального уравнения 1-го порядка (4) выполняется преобразование Фурье обеих частей этого уравнения. Получаем линейное однородное уравнение относительно $u(\omega, a)$ с переменными коэффициентами:

$$\frac{\partial u(\omega,t)}{\partial t} = (\psi(\omega,a))^2 u(\omega,t). \qquad (10)$$

Общее решение уравнения (10) имеет вид:

$$E(\omega,t) = C_0 e^{(\psi(\omega,a))^2 t}.$$

Выполнив обратное преобразование Фурье по переменной ω, получаем

$$E(x,t) = C_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\psi(\omega,a))^2 t} e^{i\omega x} d\omega.$$

Фундаментальным решением уравнения (4) называется решение $E(x,t)$, удовлетворяющее начальному условию $E(x,0) = \delta(x)$. Если обобщенная функция $f(x)$ в (9) финитна, то решение задачи Коши для уравнения (4) с начальным условием (9) записывается в виде:

$$u(x,t) = E(x,t) * f(x). \qquad (11)$$

Для определения константы C_0 воспользуемся начальным условием задачи Коши для уравнения (4):

$$E(x,0) = \delta(x).$$

В области преобразования Фурье по переменной x получаем

$$E(\omega,0) = C_0 = 1.$$

Тогда

$$E(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\psi(\omega,a))^2 t} e^{i\omega x} d\omega,$$

причем полученное решение не ограничивает выбор вейвлета только репагулярной вейвлет-функцией.

Докажем, что обобщенная функция $u(x,t) = E(x,t) * f(x)$ удовлетворяет уравнению (10). Выполнив преобразование Фурье по переменной x, имеем

$$u(\omega,t) = E(\omega,t) f(\omega). \qquad (12)$$

Подставляя (12) в уравнение (10), получаем

$$\frac{\partial E(\omega,t)}{\partial t} f(\omega) - (\psi(\omega,a))^2 E(\omega,t) f(\omega) = f(\omega)\left(\frac{\partial E(\omega,t)}{\partial t} - (\psi(\omega,a))^2 E(\omega,t)\right) = 0.$$

Докажем, что (12) удовлетворяет начальному условию задачи Коши $u(x,0) = f(x)$. В области преобразования Фурье по переменной x это условие принимает вид:

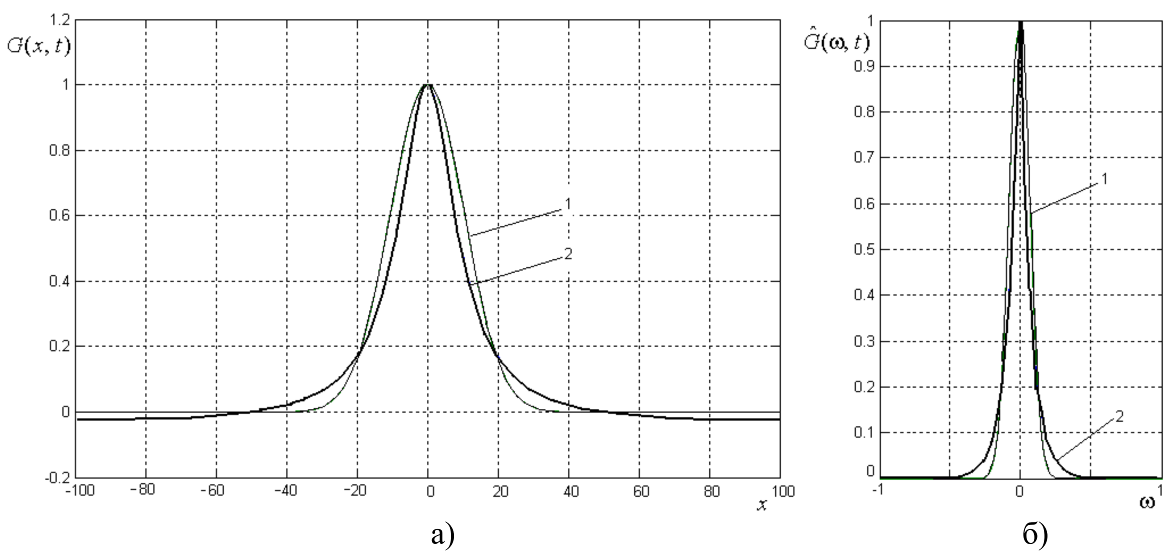
$$u(\omega,0) = f(\omega).$$

Тогда

$$\lim_{t\to 0} u(\omega,a) = \lim_{t\to 0} e^{(\psi(\omega,a))^2 t} f(\omega) = f(\omega).$$

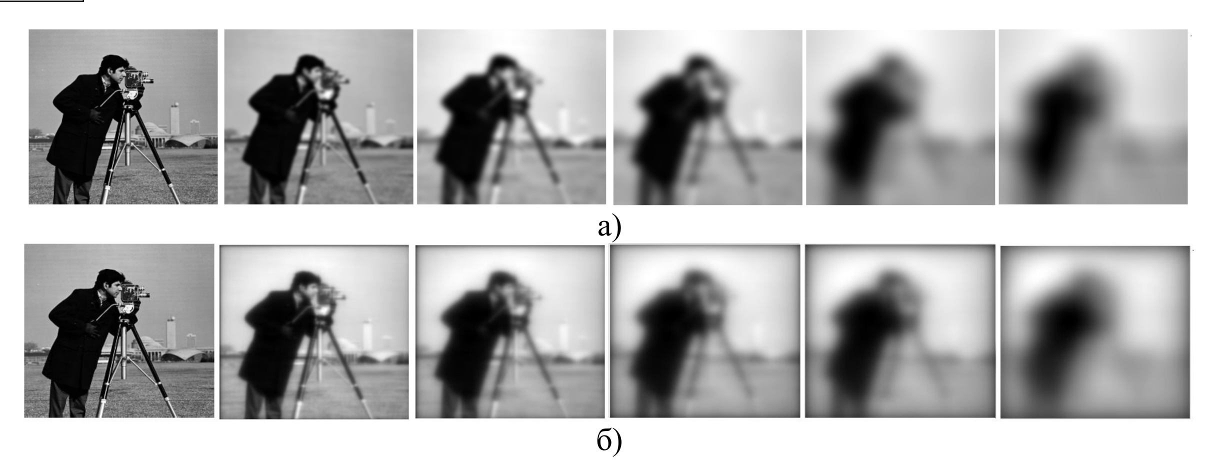
Реализация линейного масштабно-пространственного представления изображения с помощью вейвлет-преобразования

Линейное масштабно-пространственное представление изображения с помощью вейвлет-преобразования согласно формуле (11) реализуется в виде свертки каждой строки, а затем каждого столбца матрицы значений интенсивности изображения с фильтром $\{e_t(n)\}_{n=0}^{Ne}$, коэффициенты которого представляют собой дискретные значения функции $E(x,t)$. Для вычисления коэффициентов фильтра $\{e_t(n)\}_{n=0}^{Ne}$ задается параметр масштабно-пространственного представления $a \in (0,1)$. Затем определяются значения функции $\psi(\omega,a)^2$ для последовательности дискретных значений ω, например, из интервала $[-3, 3]$ с шагом 0,25. Для упрощения вычислений в качестве $\psi(\omega,a)$ использовалась функция $\tilde{\psi}(\omega,a) = 2i\cos\frac{a\pi}{2}\Gamma(-a+1)|\omega|^{a-1}\operatorname{sgn}\omega$, являющаяся преобразованием Фурье $\tilde{\psi}(x,a) = |x|^{-a}\operatorname{sgn} x$. Результат вычисления интеграла для каждого значения частоты потенцируется, а затем к полученной последовательности значений применяется обратное дискретное преобразование Фурье. Получаем коэффициенты фильтра $\{e_t(n)\}_{n=0}^{Ne}$ (рис. 1, 2).



а) б)

Рисунок 1 – Функция, производящая масштабно-пространственное представление в пространственной (а) и частотной (б) области: 1 – гауссовская (t = 1/32), 2 – предложенная (t = 1/4)



а)

б)

Рисунок 2 – Масштабно-пространственное представление изображения: линейное (а) (t = 2, 4, 8, 12, 20), линейное с помощью вейвлет-преобразования (б) (t = 1/24, 1/12, 1/6, 1/4, 1/2)

Экспериментальные исследования и выводы

Экспериментальные исследования предложенного масштабно-пространственного представления проведены на изображении размером 256 × 256 пикселей, в центре которого – белый квадрат 64 × 64 на черном фоне. На это изображение накладывался аддитивный гауссовский шум, для которого отношение сигнал/шум q определялось по формуле $q = h^2 / \sigma^2$, где h – величина контраста объекта, σ – стандартное отклонение шума.

Показателем качества масштабно-пространственного представления, применяемого для улучшения изображения, выбрана величина $F^t_{Про}$, определяемая по формуле [6]:

$$F^t_{Про} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left(I^t(i,j) - I^{эт}(i,j)\ \right)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left(I^0(i,j) - I^{эт}(i,j)\right)^2}},$$

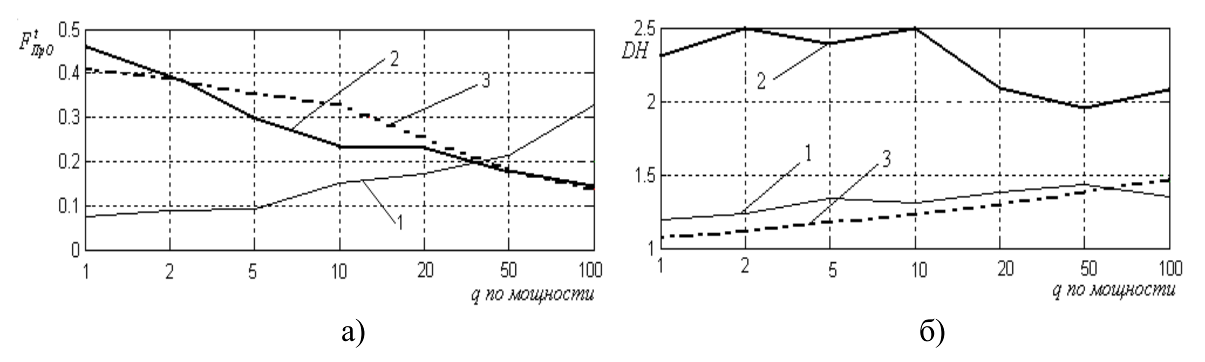
где $I^{эт}(i,j)$ – результат масштабно-пространственного представления тестового изображения; $I^t(i,j)$ – результат масштабно-пространственного представления зашумленного изображения; $I^0(i,j)$ – зашумленное изображение.

Для оценки эффективности масштабно-пространственного представления изображения предложено использовать коэффициент уменьшения энтропии, так как снижение уровня помех приводит к уменьшению энтропии изображения [6]:

$$DH = \frac{H}{HP},$$

где H – энтропия зашумленного изображения; $H = -\sum_{i=1}^{L} P(x_i)\log_2 P(x_i)$; L – количество значений интенсивности изображения; $P(x_i)$ – вероятность появления значения интенсивности x_i; HP – энтропия изображения, полученного в результате масштабно-пространственного представления.

Получены графики зависимости значения показателей эффективности и качества масштабно-пространственного представления изображения от отношения сигнал/шум по мощности (рис. 3).



а) б)

Рисунок 3 – Зависимости показателей качества (а) и эффективности (б) от отношения сигнал/шум по мощности для масштабно-пространственного представления: линейного (1), предложенного (2), нелинейного (3)

Анализируя полученные результаты, заметим, что предложенное масштабно-пространственное представление изображений, пораженных аддитивным гауссовским шумом, превышает по эффективности линейное и нелинейное масштабно-пространственное представление в 1,4 – 2,1 раза при значениях отношения сигнал/шум 100 и менее по мощности.

По значениям показателя качества предложенное масштабно-пространственное представление хуже линейного представления до 5 раз при отношении сигнал/шум 20 и менее по мощности. При значениях отношения сигнал/шум 50 и более по мощности предложенное представление превышает по показателю качества линейное масштабно-пространственное представление до 2,3 раза. Сравнение предложенного масштабно-пространственного представления с нелинейным представлением показало, что оба представления сходны по показателю качества.

По быстродействию предложенное масштабно-пространственное представление сравнимо с линейным представлением и лучше нелинейного представления в Cn раз, где n – количество итераций при вычислении нелинейного масштабно-пространственного представления (в наших экспериментах 30 – 45), C – постоянная, которая приблизительно равна 0,1 (рис. 4).

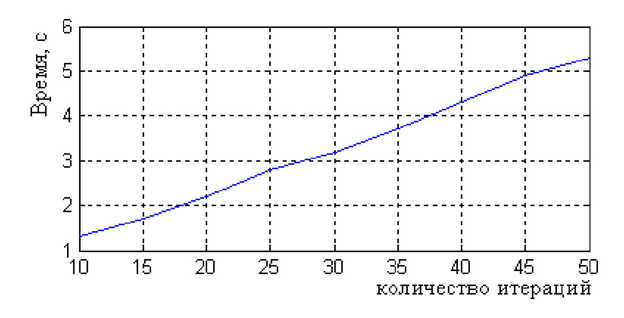


Рисунок 4 – Время вычисления нелинейного масштабно-пространственного представления изображения 256 × 256 пикселей в зависимости от количества итераций (вычисление предложенного масштабно-пространственного представления заняло 0,5 – 0,6 с)

Таким образом предложенное линейное масштабно-пространственное представление целесообразно использовать для улучшения изображений, пораженных аддитивным гауссовским шумом при отношении сигнал/шум 100 и менее по мощности в задачах, где требуется высокое быстродействие и эффективность.

Литература

1. Lindeberg T. Scale-Space Theory in Computer Vision. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 1994. – 423 p.
2. Perona P., Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion // IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 1990. – Vol. 12. – P. 629-639.
3. Полякова М.В., Крылов В.Н. Морфологический метод контурной сегментации изображений на основе репагулярного вейвлет-преобразования // Труды Одес. политех. ун-та. – Одесса, 2006. – Вып. 1 (25). – С. 98-103.
4. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. Вып. 1. – М.: Физматгиз, 1959. – 470 с.
5. Вольтера В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений: Пер. с англ. / Под ред. П.И. Кузнецова. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
6. Абакумов В.Г., Крылов В.Н., Антощук С.Г. Повышение эффективности обработки образной информации в автоматизированных системах // Электроника и связь: Темат. вып. «Проблемы электроники». – 2005. – Ч. 1. – С. 100-105.

М.В. Полякова, В.М. Крилов, Н.А. Гуляєва

Лінійне масштабно-просторове представлення зображення за допомогою вейвлет-перетворення

Розроблено метод лінійного масштабно-просторового представлення зображення на основі інтегро-диференційного рівняння 1-го порядку зі згорткою вейвлет-функцій у якості ядра інтегрального оператора.

M.V. Polyakova, V.N. Krylov, N.A. Gulyayeva

Linear Scale-space of Image with Wavelet Transform Help

The method of linear scale-space of image is developed on the basis of integro-differential equation of first order with a convolution of wavelets as the kernel of integral operator.

Статья поступила в редакцию 29.05.2008.